# Prova scritta di Analisi Matematica T - 24/06/2019

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e per l'Ambiente e il Territorio - A.A. 2018/19

**MATRICOLA**...................... **COGNOME E NOME** ................................

Si vuole sostenere la prova orale nel: [ ] I appello [ ] II appello.

(1) (6 punti) Calcolare il seguente limite di successione, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^n\,(|\alpha|+1)^n}{n\,2^n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\,(n+1)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)^n}{(n+1)^n}\cdot\left(\frac{|\alpha|+1}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{n\left(e^{1/n}-1\right)} \qquad \left(e^{1/n}-1\right)\sim\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n}_{\to e}\cdot\left(\frac{|\alpha|+1}{2}\right)^n\cdot 1$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e\cdot\left(\frac{|\alpha|+1}{2}\right)^n$$

Se $\frac{|\alpha|+1}{2} > 1 \iff |\alpha| > 1 \iff \boxed{\alpha < -1 \vee \alpha > 1} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty}$

Se $\frac{|\alpha|+1}{2} < 1 \iff \boxed{-1 < \alpha < 1} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$

Se $|\alpha| = 1 \iff \boxed{\alpha = \pm 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = e}$

MATRICOLA...................... NOME E COGNOME................................

(2) (3 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = f(\sin(x) \cdot f(x + 1)).$$

Calcolare $g'(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $g'(0)$, sapendo che

$$f(0) = \pi, \quad f'(0) = \pi, \quad f(1) = 2,$$
$$f'(1) = 0, \quad f(-1) = 0, \quad f'(-1) = e.$$

(le informazioni fornite sono sovrabbondanti).

$g'(x) = f'(\sin(x) \cdot f(x+1)) \cdot [\cos(x) \cdot f(x+1) + \sin(x) f'(x+1)]$

$\Rightarrow g'(0) = f'(0) \cdot [f(1) + 0] =$

$= 2\pi$

(3) (5 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^e \frac{(\log x)^2 + 1}{x^2} \, dx.$$

Pong $\log x = t$

$x = e^t \to dx = e^t dt$

per parti

$\to \int_1^e \frac{(\log x)^2 + 1}{x^2} dx = \int_0^1 (t^2+1) \cdot e^{-t} dt \overset{!}{=} \left[-e^{-t}(t^2+1)\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-t} \cdot 2t$

$= -\frac{2}{e} + 1 - \left[e^{-t} \cdot 2t\right]_0^1 + \int_0^1 2e^{-t} dt =$

$= -\frac{4}{e} + 1 - \left[2e^{-t}\right]_0^1 = \boxed{3 - \frac{6}{e}}$

**MATRICOLA....................... NOME E COGNOME.................................**

(4) (6 punti) Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}^+$ il seguente integrale generalizzato converge:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha + \sin x}{\sqrt{x} + x^{2\alpha}}\, dx$$

(sul foglio successivo)

(5) (5 punti) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

Eq. a variabili separabili:
$$\begin{cases} \frac{y'}{e^t} = \frac{t}{y^2} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$y' \cdot y^2 = t \cdot e^t \Rightarrow \int_{y(0)}^{y(t)} z^2\, dz = \int_0^t s e^s\, ds$$

$$\Rightarrow \frac{y^3(t)}{3} - \frac{\overbrace{y^3(0)}^{=1}}{3} = [se^s]_0^t - \int_0^t e^s ds = te^t - e^t + 1$$

$$\Rightarrow \frac{y^3(t)}{3} = te^t - e^t + \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{y(t) = \sqrt[3]{3e^t(t-1)+4}}$$

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha + \sin x}{\sqrt{x} + x^{2\alpha}}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{x^\alpha + \sin x}{\sqrt{x} + x^{2\alpha}}\,dx}_{\text{I}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha + \sin x}{\sqrt{x} + x^{2\alpha}}\,dx}_{\text{II}}$

(I) per $x \to 0$ $\sin x \sim x$

$\Rightarrow f(x) \sim \dfrac{x^\alpha + x}{\sqrt{x} + x^{2\alpha}}$

Ho 3 casi:

- $0 < \alpha \leq 1/4 \Rightarrow f(x) \sim \dfrac{x^\alpha}{x^{2\alpha}} = \dfrac{1}{x^\alpha} \rightarrow \boxed{\displaystyle\int_0^1 f(x) < +\infty \quad \forall 0 < \alpha \leq \frac{1}{4}}$

- $1/4 < \alpha \leq 1 \Rightarrow f(x) \sim \dfrac{x^\alpha}{x^{1/2}} = \dfrac{1}{x^{1/2-\alpha}} \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 f(x) < +\infty \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \alpha < 1$
  $\Leftrightarrow \alpha > -1/2$ ok!

- $\alpha > 1 \Rightarrow f(x) \sim \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 f(x) < +\infty$ ok!

Quindi (I) $= \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx < +\infty \quad \forall \alpha > 0$

(II) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha + \sin x}{\sqrt{x} + x^{2\alpha}}\,dx < +\infty \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt{x} + x^{2\alpha}}\,dx$

Ho 2 casi:

- $\alpha > \dfrac{1}{4} \rightarrow f(x) \sim \dfrac{x^\alpha}{x^{2\alpha}} = \dfrac{1}{x^\alpha} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty \Leftrightarrow \boxed{\alpha > 1}$

- $0 < \alpha \leq 1/4 \rightarrow f(x) \sim \dfrac{x^\alpha}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x^{1/2-\alpha}} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$
  $\Leftrightarrow$
  $\frac{1}{2} - \alpha > 1$
  $\Leftrightarrow \alpha < -1/2$
  No!!

Conclusione:

$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty \Leftrightarrow \boxed{\alpha > 1}$

**MATRICOLA**...................... **NOME E COGNOME**................................

(6) (7 punti) Studiare la seguente funzione e disegnarne un grafico qualitativo

$$f(x) = |x-2| + \log(x^2+1).$$

Determinare in particolare:

- Dominio;
- Limiti negli estremi del dominio;
- Eventuali asintoti;
- Intervalli di monotonia;
- Eventuali punti di massimo e minimo locale e/o assoluti;
- Eventuali punti di non derivabilità.

DOMINIO: $x^2+1>0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D=\mathbb{R}$

LIMITI: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

Cerco eventuali asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)+\log(x^2+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+2+\log(x^2+1)}{x} = -1$$

Un eventuale asintoto obliquo è della forma $y = mx+q$ con $m=1$ o $m=-1$

Cerco q: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} x-2+\log(x^2+1)-x = +\infty$

(analogamente per il caso $m=-1$) $\nexists$ asintoto

MONOTONIA:

$f'(x) = \operatorname{sgn}(x-2) + \frac{2x}{x^2+1}$ dietro $\longrightarrow$

• Se $x>2 \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1+2x}{x^2+1}$

$$= \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \geq 0 \quad \forall x$$

quindi in $(2,+\infty)$ $f \nearrow$

• Se $x<2 \rightarrow f'(x) = -1 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{-x^2-1+2x}{x^2+1}$

$$= -\frac{(x-1)^2}{x^2+1} \leq 0 \quad \forall x$$

quindi in $(-\infty,2)$ $f \searrow$

$x=2$ è pto di MIN. ASSOLUTO

$\sup f = +\infty$

Pti di non derivabilità:

$x=2$ è punto di non derivabilità, infatti

$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} \operatorname{sgn}(x-2) + \frac{2x}{x^2+1}$$

$$= 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5} \quad \neq$$

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -1 + \frac{4}{5} = -\frac{1}{5}$$

GRAFICO